**УДК** 517.977.5, 51.77

**Н.В. Антипина**
*Байкальский государственный университет,*
*Иркутск, Российская Федерация*

# ПРИЛОЖЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

**Аннотация.** В анализе потребления и сбережения интересен вопрос выявления факторов, оказывающих влияние на их динамику. Он актуален по сей день, поскольку сбережения являются главным источником инвестиций. Да и в целом, без комплексного анализа потребления и сбережения нет целостного (системного) представления об экономической динамике. С этой целью исследователи прибегают к различным научным и междисциплинарным методам, но неизменно «в тренде» остается применение экономико-математического моделирования.

В статье дается описание модели оптимального поведения потребителя при наличии бюджетного ограничения. Предлагаемая модель, по сравнению с классической задачей микроэкономики, имеет ряд особенностей, которые влекут за собой специфичность ее исследования. Целью статьи является качественный анализ этой модели с использованием методов теории оптимального управления.

Статья содержит подробное описание этапов исследования модели, приводятся результаты и экономическая интерпретация полученных выводов.

На основе проведенного исследования модели потребителю даны рекомендации по оптимальному распределению финансовых средств в зависимости от значений числовых данных поставленной задачи.

**Ключевые слова.** Потребление; сбережение; экономическая динамика; оптимальное управление; качественный анализ.

**N.V. Antipina**
*Baikal State University,*
*Irkutsk, Russian Federation*

# APPLICATION OF OPTIMAL CONTROL TO THE ANALYSIS OF ONE MODEL OF ECONOMIC DYNAMICS

**Abstract.** In the analysis of consumption and savings, the question of identifying factors that influence their dynamics is interesting. It is relevant to this day, since savings are the main source of investment. In general, without a comprehensive analysis of consumption and savings, there is no holistic (systemic) view of economic dynamics. To this purpose, researchers resort to various scientific and interdisciplinary methods, but the use of economic and mathematical modeling remains invariably "in trend".

In this article a model of optimal consumer behavior in the presence of budget constraints is described. The proposed model, in comparison with the classical problem of microeconomics, has a number of features that entail the specificity of its research. The purpose of the article is a qualitative analysis of this model using methods of optimal control theory.

The article contains a detailed description research stages of the model, the results and the economic interpretation of the findings are presented.

Based on the conducted research of the model, recommendations to the consumer on the optimal distribution of financial resources depending on the values of the numerical data of the problem are given.

**Keywords.** Utility; saving; economic dynamics; optimal control; qualitative analysis.

На сегодняшний день весьма актуальной является задача определения оптимального соотношения инвестиций и потребления [1, 2, с. 6–223], равно как и исследование математических моделей, формализующих такого рода задачи [3–9].

Как известно, цена на рынке устанавливается из равенства спроса и предложения [2, с. 8–10]. С одной стороны, речь идет о спросе на услуги и товары, обусловленные их ценностью для потребителей. В экономической теории, как известно, спрос на товары есть решение задачи максимизации полезности потребителя.

С другой стороны, можно говорить о спросе на активы, который определяется его способностью приносить доход в будущем. С точки зрения математического моделирования это означает, что его нужно учитывать не в функции полезности, описывающей предпочтения индивида, а в бюджетном ограничении, описывающем все доходы индивида (в том числе и от обладания активом). Приведенные выше рассуждения приводят к возможности построения оптимизационной модели потребления.

В данной статье рассматривается постановка и анализ задачи оптимизации поведения потребителя [10, с. 14]. По своей форме, задача похожа на стандартную микроэкономическую задачу: потребитель желает максимизировать полезность от потребления, не выходя за имеющиеся рамки бюджетного ограничения. Однако особенностями такой задачи являются:

– выбор потребительских расходов на товары и услуги в течение определенного периода жизни;

– аргументами функции полезности являются объемы потребления в разные периоды времени;

– бюджетное ограничение теперь имеет динамический характер;

– потребитель имеет возможность перераспределять доходы: если потребитель имеет возможность накапливать богатство, потребление может быть выше текущего дохода;

Результаты качественного анализа модели интерпретированы экономически. Также даны рекомендации по оптимальному распределению финансовых средств потребителя в зависимости от значений параметров модели.

## 1. Постановка задачи и ее математическая формализация

Дадим описание задачи экономической динамики потребления и сбережения некоторого потребителя на протяжении временного периода $[0, T]$.

Положим потребитель в некоторый начальный момент времени $t = 0$ имеет денежные средства в размере $W_0$ ден. ед. Далее величина этих средств увеличивается с постоянным темпом $r$ и в каждый момент времени $t$ промежутка $[0, T]$ равна $W(t)$ ден. ед. Допустим, $c(t)$ – это доля имеющейся на момент $t$ суммы $W(t)$, которую потребитель тратит на покупку благ и товаров $(0 \le c(t) \le 1)$, вторая доля составляет сбережения, $\beta > 0$ – это коэффициент дисконтирования потребления («параметр нетерпеливости»). С ростом этого коэффициента увеличивается значимость сегодняшнего потребления по сравнению с будущим. Цель потребителя – получить к конечному моменту $T$ периода $[0, T]$ желаемую сумму денежных средств в размере $W_T$, при этом максимизировать суммарное дисконтированное потребление за весь временной период $[0, T]$.

Математическая модель поставленной задачи представляет собой следующую задачу оптимального управления [10, с. 9; 11, с. 109]:

$$J = \int_0^T c(t)\, e^{-\beta t} dt \to max, \tag{1}$$

$$\dot{W}(t) = rW(t) - c(t), W(0) = W_0, W(T) = W_T, \tag{2}$$

$$0 \le c(t) \le 1, t \in [0, T]. \tag{3}$$

## 2. Качественный анализ модели

Проведем исследование модели (1)–(3) с помощью теории оптимального управления [10, с. 9; 11, с. 109].

Запишем функцию Понтрягина

$$H(t, W, c, \psi) = ce^{-\beta t} + \psi(rW - c) \tag{4}$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = -r\psi.$$

Легко видеть, что решение сопряженного уравнения таково:

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-rt}, \tag{5}$$

где $\psi(0)$ – произвольная константа.

Запишем условие максимума [11, с. 109; 12, с. 36] функции (4) по управлению $c$, учитывая (5)

$$\overline{H} = \left(e^{-\beta t} - \psi\right)c = \left(e^{-\beta t} - \psi(0)e^{-rt}\right)c \to \max_{0 \le c \le 1}.$$

После вынесения множителя $e^{-\beta t}$ это условие запишется в виде

$$\left(1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t}\right)c \to \max_{0 \le c \le 1}. \tag{6}$$

Поскольку функция $\bar{H} = \left(1 - \psi(0)e^{(\beta-r)t}\right)c$ линейна по управлению, из условия (6) оптимальное управление имеет вид:

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & \left(1 - \psi(0)e^{(\beta-r)t}\right) < 0, \\ 1, & \left(1 - \psi(0)e^{(\beta-r)t}\right) > 0, \\ \forall c \in (0;1), & \left(1 - \psi(0)e^{(\beta-r)t}\right) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Исследуем поведение функции переключения $H_c$ [11, с. 109; 12, с. 36].

Возможны два случая.

1. Предположим, что $\beta < r$.

Очевидно, функция $e^{(\beta-r)t} > 0$ и убывает $\forall t \in [0;T]$. Кроме того, на поведение функции $H_c$ оказывает влияние значение $\psi(0)$:

– если $\psi(0) \leq 0$, то $H_c > 0$ и управление $c^*(t) \equiv 1\ \forall t \in [0;T]$.

– если $0 < \psi(0) < 1$, то ситуация аналогична предыдущей;

– если $\psi(0) > 1$, то $H_c$ возрастает и пересекает ось $Ot$ в одной единственной точке. Иначе говоря, существует один момент переключения управления

$$\tau = \frac{\ln\psi(0)}{r-\beta}, \tag{8}$$

найденный из условия $H_c = 0$ и принадлежащий отрезку $[0;T]$, если выполнено условие

$$1 < \psi(0) < e^{(r-\beta)T}. \tag{9}$$

Следовательно,

– если $\psi(0) \leq 1$, то оптимальное управление $c^*(t) \equiv 1\ \forall t \in [0;T]$, а соответствующая ему фазовая траектория является решением задачи Коши (2):

$W^*(t) = e^{rt}[W_0 + (e^{-rt} - 1)e^{rT}]$;

– если $\psi(0) > 1$ оптимально следующее управление

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;\tau), \\ 1, & t \in [\tau;T], \end{cases} \tag{10}$$

где $\tau$ определяется формулой (8).

Далее найдем оптимальную траекторию, соответствующую управлению (10). Из уравнения (2), с учетом его начального условия и (10), имеем $W(t) = W_0e^{rt}$ на промежутке $[0;\tau)$. Поскольку фазовая переменная непрерывна на всем отрезке $[0;T]$, то в точке переключения $\tau$ $W(\tau) = W_0e^{r\tau} = W_0\psi(0)^{\frac{r}{r-\beta}}$. Тогда на отрезке $[\tau;T]$ траектория является решением следующей задачи

$$\dot{W}(t) = rW(t) - 1, W(\tau) = W_0\psi(0)^{\frac{r}{r-\beta}}, W(T) = W_T$$

и определяется формулой

$$W^*(t) = e^{rt}\left[W_T e^{-rT} + e^{-r(t-T)} - 1\right].$$

В итоге, оптимальная траектория на отрезке $[0; T]$ имеет вид

$$W^*(t) = \begin{cases} W_0 e^{rt}, & t \in [0; \tau), \\ e^{rt}\left[W_T e^{-rT} + e^{-r(t-T)} - 1\right], & t \in [\tau; T]. \end{cases} \quad (11)$$

Необходимость выполнения условия $W(T) = W_T$ на правом конце отрезка $[0; T]$, накладывает дополнительное условие на существование полученной экстремали (10), (11):

$$W_0 e^{rT} - \frac{e^{r(T-\tau)}}{r} = W_T \Rightarrow W_0 e^{rT} - \frac{1}{r} e^{rT} \psi(0)^{\frac{r}{\beta - r}} = W_T.$$

Из последнего соотношения находим

$$\psi(0) = e^{(r-\beta)T}\left[r(W_0 e^{rT} - W_T)\right]^{r-\beta/r}.$$

Учитывая, что экстремаль (10), (11) получена при условии (9), имеем условие ее существования:

$$\left[r(W_0 e^{rT} - W_T)\right]^{r-\beta/r} < 1. \quad (12)$$

2. Теперь положим, что $\beta \geq r$. В этом случае анализ проводится аналогично первому случаю. Оптимальное управление имеет переключение в той же точке (8) отрезка $[0; T]$ с $c(t) = 1$ на $[0; \tau)$ на $c(t) = 0$ на $[\tau; T]$.

Аналогично:

– если $\psi(0) \leq 1$, то оптимально управление $c^*(t) \equiv 0 \; \forall t \in [0; T]$, а состояние процесса на всем временном промежутке таково:

$W^*(t) = W_0 e^{rt}$;

– если $\psi(0) > 1$, оптимальное управление

$$c^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; \tau), \\ 0, & t \in [\tau; T], \end{cases} \quad (13)$$

где $\tau$ определяется формулой (8).

Найдем вторую составляющую оптимального процесса – состояние динамической системы, соответствующее управлению (13):

– на полуинтервале $[0; \tau)$ при $c(t) = 1$ для нахождения фазовой траектории снова применим метод вариации произвольной постоянной уже с начальным условием $W(0) = W_0$. Получим

$$W(t) = \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rt} + \frac{1}{r}. \qquad (14)$$

– на отрезке $[\tau; T]$ при $c(t) = 0$ получим, что задача Коши

$$\dot{W}(t) - rW(t) = 0, W(\tau) = \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{r\tau} + \frac{1}{r}$$

имеет следующее решение

$$W(t) = \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rt} + \frac{e^{r(t-\tau)}}{r}. \qquad (15)$$

Стыкуя функции (14) и (15) в точке $\tau$, получим оптимальную фазовую траекторию, соответствующую управлению (13),

$$W^*(t) = \begin{cases} \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rt} + \frac{1}{r}, & t \in [0; \tau), \\ \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rt} + \frac{e^{r(t-\tau)}}{r}, & t \in [\tau; T]. \end{cases} \qquad (16)$$

Выполнение условия $W(T) = W_T$ обеспечивает соотношение

$$\left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rT} + \frac{e^{r(T-\tau)}}{r} = W_T \Leftrightarrow \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rT} + \frac{1}{r}e^{rT}\psi(0)^{\frac{r}{\beta-r}} = W_T.$$

Отсюда $\psi(0) = [r(W_T - W_0e^{rT})e^{-rT} + 1]^{\beta - r/r}$.

Условия существования экстремали (13), (16) имеет вид неравенства

$$W_0e^{rT} < W_T. \qquad (17)$$

Приведем экономическую интерпретацию полученных результатов проведенного качественного анализа модели. В зависимости от соотношения нормы дисконтирования $\beta$ и темпа роста $r$ денежных средств $W(t)$ потребителя и величины вклада в суммарное дисконтированное потребление $\psi(0)$ рекомендуется одна из двух стратегий действий потребителя.

*Первая стратегия* применяется, если соотношение параметров задачи таково, что они удовлетворяют условию (12), то до момента времени $\tau$, определяемого формулой (8)), рекомендуется сбережение средств, а после этого момента производится расход средств на потребление. При этом динамика денежных средств отражается формулой (11). Если же при $\beta < r$ вклад в суммарное дисконтированное потребление мал ($\psi(0) \leq 1$) , то в период времени $[0; T]$ все средства расходуются только на потребление.

*Вторая стратегия*: если соотношение параметров задачи таково, что они удовлетворяют условию (17), то до момента времени $\tau$ (см. (8)) приветствуется политика потребления, а затем вплоть до конца рассматриваемого периода времени необходимо осуществлять сбережения. При этом динамика денежных средств отражается формулой (16), а их величина к моменту $T$ достигнет желаемого уровня $W_T$. Если же вклад в дисконтированное потребление небольшой ($\psi(0) \leq 1$), то в течение всего периода времени $[0; T]$ рекомендуется осуществлять накопление средств.

**Список использованной литературы**

1. Рощина Я.М. Социология потребления: учеб. пособие / Я.М. Рощина // М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. – 447 с.

2. Friedman M.A. Theory of the Consumption Function. – Princeton, 1957. – 125 p.

3. Аксенюшкина Е.В. Решение одной задачи оптимального распределения ресурсов / Е.В. Аксенюшкина // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2019. – № 1. – С. 3–12.

4. Аксенюшкина Е.А. Оптимизации рекламной стратегии компании / Е.А. Аксенюшкина, А.В. Аксенюшкин // System Analysis & Mathematical Modeling. – 2020. – Т. 2, № 3. – С. 9–17.

5. Аксенюшкина Е.В., Сорокина П.Г. Анализ налогообложения по кадастровой стоимости и определение оптимальной стратегии поведения государства с использованием аппарата теории игр// Вестник Бурятского государственного университета. Экономика и менеджмент. – 2018. – № 3. – С. 3–15.

6. Баенхаева А.В. Моделирование валового регионального продукта Иркутской области на основе применения методики множественного оценивания регрессионных параметров / А.В. Баенхаева, М.П. Базилевский, С.И. Носков // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 10-1. – С. 9–14.

7. Волченко Л.Ю. Моделирование влияния деятельности таможенных органов на социально-экономическое развитие и инвестиционную активность регионов / Л.Ю. Волченко, Н.В. Мамонова, Е.О. Завьялова // Инновационное развитие экономики. –2017. – № 6 (42). – С. 16–26.

8. Леонова О.В. Моделирование процессов убытков страховщика с помощью вероятностных распределений на примере страховой компании РОСГОССТРАХ / О.В. Леонова, П.Г. Сорокина // Baikal Research Journal. – 2017. – Т. 8, № 4. – DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).27.

9. Шуплецов А.Ф. Моделирование оптимальной стратегии развития предпринимательской деятельности промышленной компании на основе эффективного использования потенциала нематериальных ресурсов / А.Ф. Шуплецов, П.В. Харитонова // Baikal Research Journal. – 2013. – Т. 8, № 6. – С. 8–14.

10. Сотсков А.И. Оптимальное управление в примерах и задачах / А.И. Сотсков, Г.В. Колесник. – М. : Российская экономическая школа, 2002. –58 с.

11. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения //Учеб. пособие/ Б.А. Лагоша, Т.Г. Апалькова/ М.: Финансы и статистика, 2008. – 224 с.

12. Громов Ю.Ю. Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами: учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин, О.Г. Иванова, В.М. Тютюнник. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с.

**Информация об авторе**

*Антипина Наталья Валерьевна* – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация, e-mail: natant2012@mail.ru, ORCID 0000-0002-6948-6729, SPIN-код 6204-5649, AuthorID РИНЦ 00074772.

**Information about the Author**

*Natalya V. Antipina* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and of Digital Technology, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: natant2012@mail.ru, ORCID: 0000-0002-6948-6729; SPIN-Code: 6204-5649; AuthorID RSCI: 00074772.